ELMİ XƏBƏRLƏR | Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2/2022, səh. 40-78

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТЫМ СЛАГАЕМЫМ И С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Габиль Ягуб
Натиг Ибрагимов
Мерве Зенгин
Кафказский университет, Карс, Турция
Ленкоранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан
э-почта: gabilya@mail.ru
э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru
э-почта: merveezengin@gmail.com

Резюме. В данной работе рассматривается задача оптимального управления для линейного одномерного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом, когда критерий качества является интегралом по границе области и роль управления играют измеримые ограниченные коэффициенты уравнения, то есть вещественные и мнимые части комплексного потенциала, зависящие только от временной переменной. При этом сначала доказываются теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Далее в этой работе изучается вопрос небходимого условия для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. С этой целью сперва изучается разрешимость сопряженной задачи к рассматриваемой задаче оптимального управления, то есть как краевой задачи с неоднородными краевыми условиями, с помощью которого доказывется формула для градиента рассматриваемого функционала. На основе полученной формулы устанавливается необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, задача оптимального управления, градиентное слагаемое, комплексный потенциал.

Введение

Задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интересы [1-3]. Одной из таких задач является задачей движении заряженных частиц, в которой потенциал является неизвестным и подлежит определению. Известно, что если заряженная частица в постоянном однородном магнитном поле движется и направление магнитного поля выбрано вдоль оси z, тогда движение такой частицы происходит в плоскости $(x, y) \in E_2$ и это движение обычно описывается двумерным линейным уравнением Шредингера со специальным градиентным слагаемым (см. [1, с. 82]). Подобные задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены в работах [18, 34]. Отметим, что задачи задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнений Шредингера без специального градиентного слагаемого ранее подробно изучены в работах [7,8,9,10,16,20,22,23,26,30] и др. Однако задачи задачи оптимального управления для нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с интегральным критерием качества по границе области наиболее мало исследованы. Подобная задача оптимального управления для двумерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с вещественнозначным потенциалом, когда потенциал играет роли управления и ищется в классе измеримых ограниченных функций и коэффициент в нелинейной части уравенения является чисто мнимым числом, исследованы в работах [27,28]. Наряду с этими следует отметить, что задача оптимального управления для трехмерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с вещественнозначным потенциалом, когда потенциал, зависящий от обеих пространственной и временной переменных, играет роли управления и ищется в классе измеримых ограниченных функций и коэффициент в нелинейной части уравенения является комплексным числом, впервые исследована в работе [14]. Далее задача оптимального управления для трехмерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплекснозначным потенциалом, зависящим от обеих пространственной и временной переменных, ранее исследована в работе [5], когда критерий качества является финальным. Задачи оптимального управления с интегральным критерием качества по границе области для линейного многомерного и нелинейного одномерного стационарного уравнения квазиоптики или нестационарного уравнения Шредингнра со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются коэффициентами преломления и поглощения среды или вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и не зависят от пространственных переменных, зависят только от временной переменной в случае нестационарного уравнения Шредингера изучены, например, в работах [35,36]. Следует отметить, что во всех этих работах в задачах оптимального управления, от управляших функций потребовались дифференцируемость по временной переменной. Поэтому данная работа, посвященная изучению задачи оптимального управления для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и выбираются из класса измеримых ограниченных функций, зависящих только от временной переменной, а критерий качества является интегралом по границе области, представляет немалый научный интерес. Следует отметить, что подобная задача оптимального управления для многомерного линейного уравнения Шредингера со специльным градиентным слагаемым, когда управления зависят только от постранственных переменных, ранее изучена в работе [19].

2. Постановка задачи

Пусть $l>0$, $T>0$ - заданные числа, $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, $\Omega_t \equiv (0,l)\times(0,t), \Omega=\Omega_T$; $C^k([0,T],B)$- банахово пространство функций, k-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(0,l)$-лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0,l)$ со степенью $p\ge 1$; $L_2(0,T;B)$– банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_\infty(0,T;B)$–банахово пространство измеримых ограниченных на $(0,T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B; Соболевы пространства $W_p^k(0,l), W_p^{k,m}(\Omega)$ $p\ge 1,\ k\ge 0,\ m\ge 0$, определены, например, в работах[11,12,29]. Ниже всюду положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через $c_j,\ j=0,1,2,...$ и комплексное сопряжение к функции обозначим чертой над функцией. Принадлежность комплексной функции к определенному пространству означает, что действительная и мнимая части этой функции принадлежат к этому пространству.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v)=\beta_0\left\|\psi(0,.)-y_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+\beta_1\left\|\psi(l,.)-y_1\right\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\left\|v-\omega\right\|^2_H \tag{2.1}$$

на множестве:

$$V=\left\{v=v(t)=(v_0(t),v_1(t)):\ v_s\in L_2(0,T), |v_s(t)|\le b_s, s=0,1, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)\right\}$$

при условиях:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \tag{2.2}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0, t\in(0,T), \tag{2.4}$$

где $i=\sqrt{-1}$; $a_0>0, b_s>0,\ s=0,1,\ \alpha\ge 0, \beta_0\ge 0, \beta_1\ge 0, \beta_0+\beta_1\ne 0$- заданные числа; $a(x), a_1(x,t)$- измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_2, \left|\frac{d^2 a(x)}{dx^2}\right| \le \mu_3, \ \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \ \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = const > 0; \tag{2.5}$$

$$|a_1(x,t)| \le \mu_4, \left|\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}\right| \le \mu_5, \left|\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \mu_6, \overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega,$$

$$a_1(0,t) = a_1(l,t) = 0, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = const > 0; \tag{2.6}$$

$\varphi(x), f(x,t), y_0(t), y_1(t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0 \ ; \tag{2.7}$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T); \tag{2.8}$$

$$y_0, y_1 \in L_2(0,T); \qquad (2.9$$

$\omega \in H$ - заданный элемент , $H \equiv L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ и символ $\overset{0}{\forall}$ означает " при почти всех".

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из условий (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ будем называть редуцированной задачей. Ясно, что редуцированная задача является второй начально-краевой задач для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым.

Определене 2.1. При каждом $v \in V$ под решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из прстранства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.2) для почти всех $(x,t) \in \Omega$, а начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0,l)$ и краевым условиям (2.4) для почти всех $t \in (0,T)$.

Редуцированные задачи, то есть начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [7,8,9,10,16,24,25] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [6,17,18,31,32,33,34,35,36] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависит только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями, ранее изучены в работе [10]. Вторая начально-краевая задачи для нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной, изучена в работе [15] и доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть функции $a(x)$, $a_1(x,t)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.8). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right), \tag{2.10}$$

где $c_0 > 0$ не зависит от φ, f .

Из этой теоремы и теоремы вложения (см. [12, с. 98] следует, что функционал (2.1) имеет смысл в классе решений $W_2^{2,1}(\Omega)$.

3. Существование и единственность решения задачи оптимального управления

В этом параграфе будем изучить вопрос существования и единственности решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4). Поэтому сначала будем установить результат о существовании единственного решения этих задач.

Теорема 3.1. Пусть функции $a(x), a_1(x,t), \varphi(x), f(x,t), y_0(t), y_1(t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.9). Пусть, кроме того, $\omega \in H = L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ - заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение.

Доказательство опирается на следующее утверждение из невыпуклой оптимизации, указанное в работе [21] в следующей формулировке: если функционал $I_0(v)$ полунепрерывен снизу и снизу ограничен на замкнутом ограниченном множестве U равномерно выпуклого пространства X, тогда существует всюду плотное подмножество G этого пространства, что для любого $\omega \in G$ и $\alpha > 0$ функционал $I_\alpha(v) = I_0(v) + \alpha\|v - \omega\|_X^2$ достигает наименьшее значение на единственном элементе множества U .

Сперва докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. При принятых условиях функционал $J_0(v)$ примет вид:

$$J_0(v) = \beta_0\left\|\psi(0,.) - y_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + \beta_1\left\|\psi(l,.) - y_1\right\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.1}$$

Пусть $\delta v \in B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$- приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$ и $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$, где $\psi(x,t;v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v \in V$. Из условий (2.2)-(2.4) следует, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$i\frac{\partial \delta\psi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + \left(v_0(t) + \delta v_0(t)\right)\delta\psi +$$

$$+i\left(v_1(t) + \delta v_1(t)\right)\delta\psi = -\delta v_0(t)\psi(x,t) - i\delta v_1(t)\psi(x,t), (x,t) \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$\delta\psi(x,0) = 0, x \in (0,l), \frac{\partial \delta\psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta\psi(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T), \quad (3.3)$$

где $\psi_\delta = \psi_\delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v + \delta v \in V$, $\delta v \in B$.

Установим оценку для решения начально-краевой задачи (3.2), (3.3) . С этой целью обе части уравнения (3.2) умножим на функцию $\delta\bar{\psi}(x,t)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_t. Тогда, используя формулу интегрирования по частям и граничные условия из (3.3), получим равенство,

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial \delta\psi}{\partial t}\delta\bar{\psi} - a_0\left|\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\right|^2 + ia_1(x,\tau)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\delta\bar{\psi} - a(x)|\delta\psi|^2 +\right.$$

$$\left. +\left(v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)\right)|\delta\psi|^2 + i\left(v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)\right)|\delta\psi|^2 = \right.$$

$$= -\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)\psi\delta\bar{\psi}dxd\tau - i\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)\psi\delta\bar{\psi}dxd\tau, \forall t \in [0,T] .$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\delta\psi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\left(a_1(x,\tau)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\delta\bar{\psi} + a_1(x,\tau)\frac{\partial \delta\bar{\psi}}{\partial x}\delta\psi \right)dxd\tau =$$

$$= -2\int_{\Omega_t}\left(v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau - 2\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)\operatorname{Im}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)\operatorname{Re}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau, \forall t \in [0,T].$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства слагаемое $\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\delta\psi|^2 dxd\tau$ получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\delta\psi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)|\delta\psi|^2\right)dxd\tau =$$

$$= -2\int_{\Omega_t}\left(v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau - 2\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)\operatorname{Im}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\delta\psi|^2dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Второе слагаемое левой части этого равенства в силу граничных условий для $a_1(x,t)$ равняется к нулю. В этом случае преобразуя первое слагаемое и используя начальное условие из (3.3) получим справедливость равенства:

$$\int_0^l|\delta\psi(x,t)|^2dx=-2\int_{\Omega_t}(v_1(x)+\delta v_1(x))|\delta\psi|^2dxd\tau-$$
$$-2\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)\mathrm{Im}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau-2\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}(\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\delta\psi|^2dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Из этого равенства нетрудно установить следующее неравенство:

$$\int_0^l|\delta\psi(x,t)|^2dx\le 2b_1\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}|\delta v_1(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\right||\delta\psi|^2dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

В этом неравенстве используя условие для функции $a_1(x,t)$ получим следующее неравенство:

$$\int_0^l|\delta\psi(x,t)|^2dx\le(2b_1+\mu_5)\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+2\int_{\Omega_t}|\delta v_1(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского в правой части этого неравенства имеем:

$$\int_0^l|\delta\psi(x,t)|^2dx\le\le(2b_1+\mu_5+2)\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)|^2|\psi|^2dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}|\delta v_1(\tau)|^2|\psi|^2dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Отсюда в силу оценки (2.10) получим справедливость неравенства:

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le(2b_1+\mu_5+2)\int_0^t\|\delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+$$
$$+c_1\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,T)}+\|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,T)}\right),\forall t\in[0,T]. \quad (3.4)$$

Применяя в этом неравенстве лемму Гроноулла получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,T)}+\|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,T)}\right),\forall t\in[0,T]. \quad (3.5)$$

Теперь оценим $\dfrac{\partial\delta\psi}{\partial x}$. С этой целью обе части уравнения (3.2) на функцию $L\delta\overline{\psi}=-a_0\dfrac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}+a(x)\delta\overline{\psi}$ и проинтегрируемпо области Ω_t. Тогда имеем:

$$\int_{\Omega_t}\Big(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}L\delta\overline{\psi}-|L\delta\psi|^2+ia_1(x,\tau)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}L\delta\overline{\psi}+$$
$$+(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau))\delta\psi L\delta\overline{\psi}+i(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))\delta\psi\, L\delta\overline{\psi}\Big)dxd\tau=$$
$$=-\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)\psi L\delta\overline{\psi}dxd\tau-i\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)\psi L\delta\overline{\psi}dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Используя формулу для $L\delta\overline{\psi}$ и формулу интегрирования по частям имеем:

$$\int_{\Omega_t}i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}L\delta\overline{\psi}dxd\tau-\int_{\Omega_t}|L\delta\psi|^2dxd\tau-i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)a_0\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}dxd\tau+$$
$$+i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)a(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\delta\overline{\psi}dxd\tau+\int_{\Omega_t}a_0(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau))\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$
$$+i\int_{\Omega_t}a_0(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau))a(x)|\delta\psi|^2dxd\tau+i\int_{\Omega_t}(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))a(x)|\delta\psi|^2dxd\tau=$$
$$=-\int_{\Omega_t}\delta v_0(\tau)a_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau-i\int_{\Omega_t}\delta v_1(\tau)a_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau-$$
$$-\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_0(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau-i\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_1(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau,\forall t\in[0,T].\qquad(3.6)$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}L\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}L\delta\psi\right)dxd\tau-i\int_{\Omega_t}a_0a_1(x,\tau)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}\right)dxd\tau+$$
$$+i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)a(x)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\delta\psi\right)dxd\tau+$$
$$+2i\int_{\Omega_t}a_0(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))a(x)|\delta\psi|^2dxd\tau=$$
$$=-2i\int_{\Omega_t}a_0\delta v_0(\tau)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-2i\int_{\Omega_t}a_0\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-$$
$$-2i\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_0(\tau)\mathrm{Im}(\psi\delta\overline{\psi})dxd\tau-2i\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}(\psi\delta\overline{\psi})dxd\tau,\forall t\in[0,T].\qquad(3.7)$$

Первое слагаемое левой части этого равенства можем преобразовать следующим образом:

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}L\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}L\delta\psi\right)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_0\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\delta\psi\right|^2\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Здесь учитывая начальное условие из (3.3) и условие, что $\frac{\partial\delta\psi(x,0)}{\partial x}=0,\forall x\in\overset{0}{(0,l)}$ получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}L\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}L\delta\psi\right)dxd\tau=$$

$$=\int_0^l a_0\left|\frac{\partial\delta\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^l a(x)\left|\delta\psi(x,t)\right|^2dx,\forall t\in[0,T]. \tag{3.8}$$

С другой стороны второе слагаемое левой части равенства (3.7) можем написать в виде:

$$i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)a_0\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}\right)dxd\tau=i\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau-$$

$$-i\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \tag{3.9}$$

Учитывая это равенство и равенство (3.8) в левой части равенства (3.7), имеем:

$$\int_0^l a_0\left|\frac{\partial\delta\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^l a(x)\left|\delta\psi(x,t)\right|^2dx-$$

$$-\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau-\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)a(x)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega}a_0\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)a(x)\left|\delta\psi\right|^2dxd\tau+$$

$$=-2\int_{\Omega_t}a_0\delta v_0(\tau)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}a_0\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_0(\tau)\mathrm{Im}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}a(x)\delta v_1(\tau)\mathrm{Re}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \tag{3.10}$$

Ясно, что третье слагаемое левой части этого равенства в силу граничных условий из (3.3) равняется нулю. Поэтому из этого равенства с учетом условия на коэффициенты уравнения нетрудно установить справедливость неравенства:

$$a_0\int_0^l\left|\frac{\partial\delta\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dx+\mu_0\int_0^l|\delta\psi(x,t)|^2dx\le(\mu_5a_0+2a_0b_1)\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\mu_4\mu_1\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right||\delta\psi|dxd\tau+2\mu_1b_1\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2dxd\tau+$$

$$+2a_0\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+2a_0\int_{\Omega_t}|\delta v_1(\tau)|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+$$

$$+2\mu_1\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+2\mu_1\int_{\Omega_t}|\delta v_1(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \tag{3.11}$$

В силу оценок (2.10) и (3.5) из неравенства (3.11) с применением неравенства Коши-Буняковского получим справедливость следующего неравенства

$$\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_3\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,T)}+\|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,T)}\right)+c_4\int_0^t\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\forall t\in[0,T].$$

Из этого неравенства с применением неравенство Гронуолла имеем:

$$\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_5\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,T)}+\|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,T)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.12}$$

Используя эту оценку и оценку (3.5) установим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_6\|\delta v\|^2_B,\forall t\in[0,T]. \tag{3.13}$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $t\in[0,T]$ имеем:

$$\|\delta\psi\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}\le c_7\|\delta v\|^2_B. \tag{3.14}$$

С помощью теоремы о следах (см. [13], стр. 170) получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)}\le c_8\|\delta v\|^2_B. \tag{3.15}$$

Здесь постоянные $c_5>0,c_6>0,c_7>0,c_8>0$ не зависят от δv.

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v\in V$. С помощью формулы (3.1) имеем:

$$\delta J_0(v)=J_0(v+\delta v)-J_0(v)=2\beta_0\int_0^T\mathrm{Re}\left[(\psi(0,t)-y_0(t))\delta\overline{\psi}(0,t)\right]dt+$$

$$+2\beta_1\int_0^T\mathrm{Re}\left[(\psi(l,t)-y_1(t))\delta\overline{\psi}(l,t)\right]dt+\beta_0\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\beta_1\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.16}$$

Используя оценку (2.10) нетрудно установить справедливость оценки:

$$\|\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\|\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)}\le c_9\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right). \tag{3.17}$$

Из формулы (3.16) применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (3.15), (3.17) получим справедливость неравенства:

$$\left|\delta J_0(v)\right| \le c_{10}\left(\|\delta v\|_B + \|\delta v\|_B^2\right), \forall v \in V. \tag{3.18}$$

Из этого неравенства следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством пространства $B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$. Нетрудно доказать, что оно является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерного выпуклого пространства $H = L_2(0,T) \times L_2(0,T)$[4]. Тогда в силу сформулированного выше утверждения невыпуклой оптимизаци из работы [21] существует плотное подмножество G из пространства H такое, что при любом $\omega \in G$ и при любом $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при любом $\alpha \ge 0$ и любом $\omega \in H$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^k\} \subset V$: $\lim\limits_{k\to\infty} J_\alpha(v^k) = J_{\alpha*} = \inf\limits_{v\in V} J_\alpha(v)$.Положим $\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi(x,t;v^k)$, $k = 1,2,\ldots$. В силу теоремы 3.1 при каждом $v^k \in V$ редуцированная задача (2.2)-(2.4) имеет единственное решение $\psi_k(x,z)$ из пространства B_1 и для этого решения верна оценка:

$$\|\psi_k\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right), k = 1,2,\ldots, \tag{3.19}$$

где правая часть оценки не зависит от k.

Поскольку множество V есть ограниченное множество банахова пространства $B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$, то из последовательности $\{v^k\} \subset V$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{v^{k_p}\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v^k\}$, что

$$v_s^k \to v_s, s = 0,1 \text{ (*) слабо в } L_\infty(0,T), \tag{3.20}$$

при $k \to \infty$. Кроме того, V является замкнутым выпуклым множеством из B. Поэтому V есть (*) слабо замкнутое множество, то есть $v \in V$.

Из оценки (3.19) следует, что последовательность $\{\psi_k(x,t)\}$ равномерно ограничена в норме пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность $\{\psi_{k_p}(x,t)\}$,которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_k(x,t)\}$, что

$$\psi_k \to \psi \text{ слабо в } L_2(\Omega); \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \to \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(\Omega); \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ слабо в } L_2(\Omega); \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \to \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(\Omega) \tag{3.24}$$

при $k \to \infty$.

Ясно, что каждый элемент $\{\psi_k(x,t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет интегралному тождеству:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a(x)\psi_k + v_0^k(t)\psi_k + iv_1^k(t)\psi_k - f(x,t) \right)\overline{\eta}(x,t)dxdt = 0,$$

$$k = 1,2,... \tag{3.25}$$

для любой функции $\eta = \eta(x,t)$ из $L_2(\Omega)$, начальному условию:

$$\psi_k(x,0) = \varphi(x),\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l), k = 1,2,... \tag{3.26}$$

и краевоым условиям:

$$\frac{\partial \psi_k(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_k(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} t \in (0,T), k = 1,2,.... \tag{3.27}$$

В силу компактности вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и силу предельных соотношений (3.21)-(3.24) имеем:

$$\|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \to 0 , \tag{3.28}$$

при $k \to \infty$. Используя это и предельное соотношение (3.20) можем установить справедливость соотношений:

$$\int_\Omega v_s^k(t)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt \to \int_\Omega v_s(t)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt, s = 0,1, \tag{3.29}$$

для любой а функции $\eta \in L_2(\Omega)$ при $k \to \infty$. Действительно, можем написать следующие равенства:

$$\int_\Omega v_s^k(t)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt = \int_\Omega v_s^k(t)(\psi_k(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_\Omega (v_s^k(t) - v_s(t))\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt + \int_\Omega v_s(t)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt, s = 0,1. \tag{3.30}$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое правой части этого равенства:

$$\left| \int_\Omega v_s^k(t)(\psi_k(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x,t)dxdt \right| \le \int_\Omega |v_s^k(t)||\psi_k(x,t) - \psi(x,t)||\eta(x,t)|dxdt \le$$

$$\le \|v_s^k\|_{L_\infty(0,T)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \le b_s \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)}, s = 0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.31}$$

С учетом предельного соотношения (3.28) если переходить к пределу в обоих частьях этих неравенств при $k \to \infty$ получим справедливость предельных соотношений:

$$\int_\Omega v_s^k(t)\left(\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt \to 0, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.32}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (3.30). Ясно, что функция $g(t)=\int_0^l \psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)dx$ принадлежит пространству $L_1(0,T)$. Действительно, из условий $\psi \in L_2(\Omega), \eta \in L_2(\Omega)$ и неравенства Коши-Буняковского получим:

$$\|g\|_{L_1(0,T)} = \int_0^T |g(t)|dt = \int_0^T \left|\int_0^l \psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)dx\right|dt \le \int_0^T\int_0^l |\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)|dxdt \le$$
$$\le \|\psi\|_{L_2(\Omega)}\|\eta\|_{L_2(\Omega)} < +\infty.$$

С учетом этого и предельных соотношений (3.20) нетрудно получить справедливость следующих предельных соотношений:

$$\int_\Omega \left(v_s^k(t)-v_s(t)\right)\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt \to 0, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega) \text{ при } k \to \infty . \tag{3.33}$$

Таким образом, используя предельные соотношения (3.32), (3.33) если переходить к пределу в обеих частьях равенств (3.30), то оттуда получим справедливость предельных соотношений (3.29). Тогда, используя предельные соотношения (3.21)-(3.24), (3.29), если переходить к пределу в интегральном тождестве (3.25), то при $k \to \infty$ получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi-f(x,t)\right)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt=0 \tag{3.34}$$

для любой функции $\eta=\eta(x,t)$ из $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,t)$ для почти всех $(x,t)\in\Omega$ удовлетворяет уравнению (2.2).

В силу компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0,T],L_2(0,l))$ можем написать следующее прдельное соотношение:

$$\|\psi_k(.,t)-\psi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{3.35}$$

равномерно относительно $t\in[0,T]$ при $k \to \infty$.

Удовлетворение начального условия следует из предельного соотношения (3.35) при $t=0$, начального условия (3.26) и из следующего неравенства:

$$\|\psi(\cdot,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)} \le \|\psi(\cdot,0)-\psi_k(\cdot,0)\|_{L_2(0,l)} + \|\psi_k(\cdot,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)}.$$

Действительно, если с учетом предельного соотношения (3.35) при $t=0$ и условия (3.26) если переходить к пределу в обеих частьях этого неравенства, то при $k \to \infty$ получим справедливость соотношения:

$$\left\|\psi(\cdot,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0.$$

Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (2.3) для почти всех $x\in(0,l)$.

Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет вторым краевым условиям (2.4). Действительно, в силу леммы 3.4 работы [12, с. 98]и условия, что подпоследовательность $\{\psi_k(x,t)\}$принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$, можем утверждать справедливость предельных соотнощений:

$$\frac{\partial\psi_k(s,t)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x},s=0,l \text{ слабо в } L_2(0,T) \tag{3.36}$$

при $k\to\infty$. Тогда, используя эти пределные соотношения и краевые условия (3.27), из равенств

$$\int_0^T\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt=\int_0^T\left(\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_k(s,t)}{\partial x}\right)\overline{\eta}(t)dt+\int_0^T\frac{\partial\psi_k(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt,s=0,l$$

с переходом к пределу получим справедливость краевых условий:

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0,\overset{0}{\forall}t\in(0,T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x,t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4), соответствующим предельной функции $v\in V$, то есть $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$. Кроме того, для этой функции справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (3.19) с переходом к пределу по слабо сходящиеся подпоследовательности $\{\psi_k(x,t)\}$. В силу теоремы 2.1 такое решение единственно и принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$. Используя слабую полунепрерывность снизу нормы пространств $L_2(0,T),H$, а также предельные соотношения: $v_s^k\to v_s,m=0,1$ слабо в $L_2(0,T)$, $\psi_k(s,.)\to\psi(s,.),s=0,l$ сильно в $L_2(0,T)$ при $k\to\infty$ для $\forall\alpha\geq 0$ и $\forall\omega\in H$ имеем:

$$J_{\alpha*}\leq J_\alpha(v)\leq\underline{\lim}_{k\to\infty}J_\alpha\left(v^k\right)=\inf_{v\in V}J_\alpha(v)=J_{\alpha*}.$$

Отсюда следует, что $v\in V$ является решением задачи оптимального управления (2.1)-(2.4) при $\alpha\geq 0$ и $\forall\omega\in H$. Теорема 3.2 доказана.

4. Дифференцирееумоть функционала и необходимое условие для решения задачи оптимального управления.

В этом параграфе будем установить дифференцируемость функционала (2.1) и доказать необходимое условие для решения вариационной задачи (2.1)-(2.4) в виде варицонного неравенства. Пусть $\Phi=\Phi(x,t)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\Phi\right)-a(x)\Phi+v_0(t)\Phi-iv_1(t)\Phi=0,(x,t)\in\Omega, \qquad (4.1)$$

$$\Phi(x,T)=0,\ x\in(0,l), \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial\Phi(0,t)}{\partial x}=-\frac{2\beta_0}{a_0}\left(\psi(0,t)-y_0(t)\right),\frac{\partial\Phi(l,t)}{\partial x}=\frac{2\beta_1}{a_0}\left(\psi(l,t)-y_1(t)\right),t\in(0,T), \qquad (4.3)$$

где $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v\in V$. Эту краевую задачу (4.1)-(4.3) будем называть сопряженной задачей к задаче оптимального управления (2.1)-(2.4).

Здесь функции $a(x),a_1(x,t),\ \varphi(x),\ f(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.9). Наряду с этими условиями предположим, что функции $a_1(x,t),y_0(t),y_1(t)$ удовлетворяют еще условиям:

$$\left|\frac{\partial^3 a_1(x,t)}{\partial x^3}\right|\le\mu_7,\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega,\mu_7=const>0, \qquad (4.4)$$

$$y_0,y_1\in W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)\ . \qquad (4.5)$$

Определение 4.1. Под решением сопряженной задачи (4.1)-(4.3) будем понимать функцию $\Phi(x,t)$ из пространства $C^0\left([0,T],L_2(0,l)\right)$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega\left[\Phi(x,t)\left(-i\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\eta}_1}{\partial x^2}-ia_1(x,t)\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial x}-a(x)\overline{\eta}_1+v_0(t)\overline{\eta}_1-iv_1(t)\overline{\eta}_1\right)\right]dxdt=$$

$$=-2\beta_0\int_0^T\left(\psi(0,t)-y_0(t)\right)\overline{\eta}_1(0,t)\,dt\ -2\beta_1\int_0^T\left(\psi(l,t)-y_1(t)\right)\overline{\eta}_1(l,t)dt \qquad (4.6)$$

для любой функции $\eta_1\in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0)=0,\overset{0}{\forall}x\in(0,l)$, $\frac{\partial\eta_1(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial x}=0,\overset{0}{\forall}t\in(0,T)$.

Как видно, что сопряженная задача (4.1)-(4.3) является краевой задачей с неоднородными граничными условиями. Как известно, что эту краевую задачу с помощью замены $t=T-\tau$ можно свести к начально-краевой задаче для нестационарного уравнения Шредингера с неоднородными граничными условиями. Сначала эту краевую задачу напишем в следующем виде:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\Phi\right)-a(x)\Phi+v_0(t)\Phi-iv_1(t)\Phi=0,(x,t)\in\Omega, \qquad (4.7)$$

$$\Phi(x,T)=0\,,\ x\in(0,l)\,, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial\Phi(0,t)}{\partial x}=g_0(t),\frac{\partial\Phi(l,t)}{\partial x}=g_1(t),t\in(0,T)\,, \tag{4.9}$$

где функции $g_0(t),g_1(t)$ определяются формулами:

$$g_0(t)=-\frac{2\beta_0}{a_0}\big(\psi(0,t)-y_0(t)\big),g_1(t)=\frac{2\beta_1}{a_0}\big(\psi(l,t)-y_1(t)\big),t\in(0,T)\,. \tag{4.10}$$

Как видно в задаче (4.7)-(4.9) краевые условия являются неоднородными. Поэтому сначала эту задачу сведем к задаче с однородными краевыми условиями. Используя методику работы [10] задачу (4.7)-(4.9) можем свести к следующей задаче:

$$i\frac{\partial w}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x,t)w\big)-a(x)w+v_0(t)w-iv_1(t)w=F(x,t),(x,t)\in\Omega\,, \tag{4.11}$$

$$w(x,T)=0,x\in(0,l)\,, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial w(l,t)}{\partial x}=0,t\in(0,T)\,, \tag{4.13}$$

где функции $w(x,t),F(x,t)$ определяются формулами:

$$w=w(x,t)=\Phi(x,t)-z(x,t),F(x,t)=(1-i)\frac{\partial z}{\partial t}-i\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x,t)z\big)-v_0(t)z+iv_1(t)z\,, \tag{4.14}$$

а функция $z=z(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a(x)z=0\,,(x,t)\in\Omega\,, \tag{4.15}$$

$$z(x,T)=0,x\in(0,l)\,, \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial z(0,t)}{\partial x}=g_0(t),\frac{\partial z(l,t)}{\partial x}=g_1(t),t\in(0,T)\,. \tag{4.17}$$

В этой задаче функции $z=z(x,t),g_0(t),g_1(t)$ являются комплекснозначными функциями, которые определяются формулами:

$$z(x,t)=z_1(x,t)+iz_2(x,t)=\operatorname{Re}z(x,t)+i\operatorname{Im}z(x,t),$$

$$g_0(t)=g_{01}(t)+ig_{02}(t)==\operatorname{Re}g_0(t)+i\operatorname{Im}g_0(t)\,,$$

$$g_1(t)=g_{11}(t)+ig_{12}(t)=\operatorname{Re}g_1(t)+i\operatorname{Im}g_1(t)\,.$$

Следует отметим, что функции $z_1(x,t)=\operatorname{Re}z(x,t)$ и $z_2(x,t)=\operatorname{Im}z(x,t)$ являются решениями краевой задачи (4.15)-(4.17) соответствующими граничным функциям $g_{01}(t)=\operatorname{Re}g_0(t),g_{11}(t)=\operatorname{Re}g_1(t)$ и $g_{02}(t)=\operatorname{Im}g_0(t),g_{12}(t)=\operatorname{Im}g_1(t)$ соответственно.

В силу теоремы вложения, известной из работ[12,29] $W_2^{2,1}(\Omega)\subset W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)$. Поэтому функция $\psi(x,t)$, которая является решением начално-краевой задачи (2.2)-(2.4), принадлежащая пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ имеет след $\psi(0,.),\psi(l,.)\in W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)$. Тогда в силу формул (4.10) и условий (4.5) получим справедливость условий:

$$g_0, g_1 \in W_2^{\frac{1}{4}}(0,T). \tag{4.18}$$

Как видно задача (4.15)-(4.17) есть вторая краевая задача для параболического уравнения с неоднородными краевыми условиями. Эту задачу с помощью замены $\tau = T - t$ можно свести к следующей второй начально-краевой задаче:

$$-\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau}+a_0\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x^2}-a(x)\tilde{z}=0,(x,\tau)\in\Omega, \tag{4.19}$$

$$\tilde{z}(x,0)=0, x\in(0,l), \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \tilde{z}(0,\tau)}{\partial x}=\tilde{g}_0(\tau),\frac{\partial \tilde{z}(l,\tau)}{\partial x}=\tilde{g}_1(\tau),\tau\in(0,T), \tag{4.21}$$

где $\tilde{z}(x,\tau)=z(x,T-\tau)=z(x,t)$, $\tilde{g}_0(\tau)=g_0(T-\tau)=g_0(t)$, $\tilde{g}_1(\tau)=g_1(T-\tau)=g_1(t)$.

Следует отметить, что начально-краевая задача (4.19)-(4.21) изучена, например, в работах [12,29], а потом впервые использована в работы [8] для сведения начально-краевых задач для уравнения Шредингера с неоднородными краевыми условиями к начально-краевым задачам с однородными краевыми условиями. С помощью результатов работ [12,29] при принятых предположениях можем утверждать, что начально-краевая задача (4.19)-(4.21) имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\tilde{z}\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{11}\left(\|\tilde{g}_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|\tilde{g}_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right), \tag{4.22}$$

где постоянная $c_{11}>0$ не зависит от $\tilde{g}_0(\tau),\tilde{g}_1(\tau)$. Ясно, что начально-краевая задача (4.19)-(4.21) эквивалентна к краевой задаче (4.15)-(4.17). Тогда можем утверждать, что краевая задача (4.15)-(4.17) также имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|z\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{12}\left(\|g_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|g_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right). \tag{4.23}$$

Теперь вернемся к краевой задаче (4.11)-(4.13). Рассмотрим функцию $F(x,t)$, которая является правой частью уравнения (4.11). В силу условий (4.5) и оценок (3.17), (4.23) из формулы (4.14) для функции $F(x,t)$ при принятых предположениях можем установить справедливость условия:

$$F \in L_2(\Omega). \tag{4.24}$$

Определение 4.2. Под решением краевой задачи (4.11)-(4.13) будем понимать функцию $w(x,t)$ из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left[w(x,t)\left(-i\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\bar\eta_1}{\partial x^2}-ia_1(x,t)\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial x}-a(x)\bar\eta_1+v_0(t)\bar\eta_1-iv_1(t)\bar\eta_1\right)\right]dxdt=$$

$$=\int_\Omega F(x,t)\bar\eta_1(x,t)\,dxdt \tag{4.25}$$

для любой функции $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\dfrac{\partial\eta_1(0,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial x}=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$.

Отметим, что краевую задачу (4.11)-(4.13) можем свести к начально-краевой задаче. Действительно, в задаче (4.11)-(4.13) используя замену переменной $\tau=T-t$ эту краевую задачу можем свасти к следующей начально-краевой задаче:

$$-i\frac{\partial\tilde w}{\partial\tau}+a_0\frac{\partial^2\tilde w}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}(\tilde a_1(x,\tau)\tilde w)-a(x)\tilde w+\tilde v_0(\tau)\tilde w-i\tilde v_1(\tau)\tilde w=\tilde F(x,\tau),(x,\tau)\in\Omega, \tag{4.26}$$

$$\tilde w(x,0)=0, x\in(0,l), \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial\tilde w(0,\tau)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde w(l,\tau)}{\partial x}=0, \tau\in(0,T), \tag{4.28}$$

где $\tilde w(x,\tau)=w(x,T-\tau)=w(x,t)$, $\tilde F(x,\tau)=F(x,T-\tau)=F(x,t)$, $\tilde a_1(x,\tau)=a_1(x,T-\tau)=$ $=a_1(x,t), \tilde v_s(\tau)=v_s(T-\tau)=v_s(t), s=0,1$. Если напишем комплексно-сопряженную задачу этой начально-краевой задачи и обозначая комплексное сопряжение $\tilde w(x,\tau)=w(x,T-\tau)=w(x,t)$ через $\phi(x,\tau)$, то для функции $\phi=\phi(x,\tau)$ получим следующую начально-краевую задачу:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}(\tilde a_1(x,\tau)\phi)-a(x)\phi+\tilde v_0(\tau)\phi+i\tilde v_1(\tau)\phi=G(x,\tau),(x,\tau)\in\Omega, \tag{4.29}$$

$$\phi(x,0)=0, x\in(0,l), \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial\phi(0,\tau)}{\partial x}=\frac{\partial\phi(l,\tau)}{\partial x}=0, \tau\in(0,T). \tag{4.31}$$

Здесь функция $G(x,t)$является комплексным сопряжением функции $\tilde F(x,\tau)$. Ясно, что краевая задача (4.11)-(4.13) эквивалентна к начально-краевой задаче (4.29)-(4.31). Поэтому вместо задачи (4.11)-(4.13) будем исследовать задачу (4.29)-(4.31). Для простаты изложения, задачу (4.29)-(4.31) с помощью равенств $\tilde{a}_1(x,\tau)= a_1(x,t), \tilde{v}_s(\tau)=v_s(t), s=0,1$ и обозначения τ через t напищем в следующем виде:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\phi\right)-a(x)\phi+v_0(t)\phi+iv_1(t)\phi=G(x,t),(x,t)\in\Omega, \tag{4.32}$$

$$\phi(x,0)=0, x\in(0,l), \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial\phi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi(l,t)}{\partial x}=0, t\in(0,T). \tag{4.34}$$

Как видно эта задача является начально-краевой задачей для уравнения типа Шредингера вида (4.32) с комплексным потенциалом, содержащего специального градиентного слагаемого, с однородными краевыми условиями.

Определение 5.3. Под решением начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) будем понимать функцию $\phi(x,t)$ из пространства $C^0\left([0,T],L_2(0,l)\right)$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega\left[\phi(x,t)\left(-i\frac{\partial\bar{\eta}_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\bar{\eta}_1}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\bar{\eta}_1}{\partial x}-a(x)\bar{\eta}_1+v_0(t)\bar{\eta}_1+iv_1(t)\bar{\eta}_1\right)\right]dxdt=$$

$$=\int_\Omega G(x,t)\bar{\eta}_1(x,t)dxdt \tag{4.35}$$

для любой функции $\eta_1\in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,T)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\frac{\partial\eta_1(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial x}=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$.

Для доказательства существования и единственности решения начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) будем рассматривать следующую вспомогательную начально-краевую задачу с однородными начальными и краевыми условиями:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\phi\right)-a(x)\phi+v_0(t)\phi+iv_1(t)\phi=g(x,t),(x,t)\in\Omega, \tag{4.36}$$

$$\phi(x,0)=0, x\in(0,l), \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial\phi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi(l,t)}{\partial x}=0, t\in(0,T), \tag{4.38}$$

где функции функции $a(x), a_1(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5), (2.6), (4.4), а функция $g(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$g\in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial g(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial g(l,t)}{\partial x}=0, t\in(0,T). \tag{4.39}$$

Определене 4.4. Под решением начально-краевой задачи (4.36)-(4.38) будем понимать функцию $\phi=\phi(x,t)$ из прстранства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

(4.36) для почти всех $(x,t)\in\Omega$, а начальному условию (4.37) для почти всех $x\in(0,l)$ и краевым условиям (4.38) для почти всех $t\in(0,T)$.

Теорема 4.1. Пусть функции $a(x), a_1(x,t), g(x,t)$ удовлетворяют усдовиям (2.5), (2.6), (4.4), (4.39) соответственно. Пусть, кроме того, $v=(v_0,v_1)\in V$. Тогда существует единственное решение начально-краевой задачи (4.36)-(4.38) из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le \tilde{c}_0 \|g\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}, \tag{4.40}$$

где $\tilde{c}_0>0$ постоянная не зависит от g.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2.1. При доказательства этой теоремы в отличие от теоремы 2.1 наряду с условиями (2.6) используется условие (4.4) для функции $a_1(x,t)$. Это условие связано с градиетным слагаемым, которое содержит производное $\dfrac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}$.

Теперь используя эту вспомогательную теорему будем доказывать существование и единственность слабого обобщенного решения начально-краевой задачи из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$.

Теорема 4.2. Пусть функции $a(x), a_1(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5), (2.6), (4.4) соответственно и $G\in L_2(\Omega)$. Пусть, кроме того, $v=(v_0,v_1)\in V$. Тогда существует единственное слабое обобщенное решение начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13}\|G\|^2_{L_2(\Omega)}, \forall t\in[0,T], \tag{4.41}$$

где $c_{13}>0$ постоянная не зависит от G,t.

Доказательство. Для доказательства будем использовать метод сглаживания данных, известного из работ [11,12,13]. С этой целью функцию $G(x,t)$ из $L_2(\Omega)$ будем аппроксимировать функциями $G^{(k)}(x,t), k=1,2,...$ из $W_2^{2,0}(\Omega)$ таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

$$G^{(k)}\in W_2^{2,0}(\Omega), k=1,2,..., \tag{4.42}$$

$$\left\|G^{(k)}-G\right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \text{ при } k\to\infty. \tag{4.43}$$

Если в задаче (4.32)-(4.34) вместо правой части $G(x,t)$ уравнения (4.32) возьмем функции $G^{(k)}(x,t), k=1,2,...$, то получим следующую последовательность задач:

$$i\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi^{(k)}}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\phi^{(k)}\right)-a(x)\phi^{(k)}+v_0(t)\phi^{(k)}+iv_1(t)\phi^{(k)}=$$

$$=G^{(k)}(x,t),(x,t)\in\Omega,k=1,2,..., \quad (4.44)$$

$$\phi^{(k)}(x,0)=0,x\in(0,l),k=1,2,..., \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial\phi^{(k)}(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(k)}(l,t)}{\partial x}=0,t\in(0,T),k=1,2,...,. \quad (4.46)$$

При принятых предположениях данные этой последовательности начально-краевых задач удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Поэтому используя эту теорему можем утверждать, что при каждом $k=1,2,...$ начально-краевая задача (4.44)-(4.46) имеет единственное почти всюду решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$. Ясно, что функции $\phi^{(k)}(x,t),k=1,2,...$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, которые являются решениями этой задачи, для $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ и $\forall t\in(0,T)$ удовлетворяют следующим интегральным тождествам:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi^{(k)}}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\phi^{(k)}\right)-a(x)\phi^{(k)}+v_0(\tau)\phi^{(k)}+iv_1(\tau)\phi^{(k)}\right]\bar\eta(x,\tau)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}G^{(k)}(x,t)\bar\eta(x,\tau)dxd\tau,\forall t\in[0,T],k=1,2,... \ , \quad (4.47)$$

следующим начальным и краевым условиям:

$$\phi^{(k)}(x,0)=0,\overset{0}{\forall}x\in(0,l),k=1,2,..., \quad (4.48$$

$$\frac{\partial\phi^{(k)}(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(k)}(l,t)}{\partial x}=0,\overset{0}{\forall}t\in(0,T),k=1,2,... \quad (4.49)$$

соответственно.

Теперь рассмотрим разности: $\phi^{(k)}-\phi^{(m)}=\phi^{(k)}(x,t)-\phi^{(m)}(x,t),k,m=1,2,...$. Ясно, что эти разности принадлежат пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$. Если в соотношениях (4.44)-(4.46) вместо k возьмем m и полученные соотношения вычтем из соотношений (4.44)-(4.46), то получим соотношения, которым удовлетворяют последовательность функций $\phi_{km}(x,t)=\phi^{(k)}(x,t)-\phi^{(m)}(x,t),k,m=1,2,...$. Ясно, что эти функции для $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ и $\forall t\in(0,T)$ будут удовлетворять следующим интегральным тождествам:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\phi_{km}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi_{km}}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\phi_{km}\right)-a(x)\phi_{km}+v_0(\tau)\phi_{km}+iv_1(\tau)\phi_{km}\right]\bar\eta(x,\tau)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\bar\eta(x,\tau)dxd\tau,\forall t\in[0,T],k,m=1,2,.... \quad (4.50)$$

следующим начальным и краевым условиям:

$$\phi_{km}(x,0)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l), k,m=1,2,..., \qquad (4.51)$$

$$\frac{\partial\phi_{km}(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi_{km}(l,t)}{\partial x}=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T), k,m=1,2,... \qquad (4.52)$$

соответственно.

В интегральном тождества (4.50) вместо пробной функции $\eta\in L_2(\Omega)$ возьмем функции $\phi_{km}\in W_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда получим следуюшие равенства:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\phi_{km}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi_{km}}{\partial x^2}-i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\phi_{km}\right)-a(x)\phi_{km}+v_0(\tau)\phi_{km}+iv_1(\tau)\phi_{km}\right]\overline{\phi}_{km}(x,\tau)dxd\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\overline{\phi}_{km}(x,\tau)dxd\tau, \forall t\in[0,T], k,m=1,2,....$$

Во втором и третьем слагаемых левой части этого равенства произведя интегрирования по частьям и используя краевые условия (4.52) и $a_1(0,t)=a_1(l,t)=0, t\in(0,T)$ получим справедливость следующих равенств:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\phi_{km}}{\partial t}\overline{\phi}_{km}-a_0\left|\frac{\partial\phi_{km}}{\partial x}\right|^2+ia_1(x,\tau)\phi_{km}\frac{\partial\overline{\phi}_{km}}{\partial x}-a(x)|\phi_{km}|^2+v_0(\tau)|\phi_{km}|^2+iv_1(\tau)|\phi_{km}|^2\right]dxd\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\overline{\phi}_{km}(x,\tau)dxd\tau, \forall t\in[0,T], k,m=1,2,... .$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение, получим следующие равенства:

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\phi_{km}}{\partial t}\overline{\phi}_{km}+\frac{\partial\overline{\phi}_{km}}{\partial t}\phi_{km}\right)dxd\tau+i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)\left(\phi_{km}\frac{\partial\overline{\phi}_{km}}{\partial x}+\overline{\phi}_{km}\frac{\partial\phi_{km}}{\partial x}\right)dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}v_1(\tau)|\phi_{km}|^2dxd\tau=$$
$$=2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\overline{\phi}_{km}(x,\tau)\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T], k,m=1,2,... . \qquad (4.53)$$

Умножая обеих частей этих равенств на $(-i)$ и преобразуя второе слагаемое левой части полученных равенств имеем:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\phi_{km}|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)|\phi_{km}|^2\right)dxd\tau-\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\phi_{km}|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}v_1(\tau)|\phi_{km}|^2dxd\tau=$$
$$=2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\overline{\phi}_{km}(x,\tau)\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T], k,m=1,2,... .$$

С помощью начальных условий (4.51) и краевых условий $a_1(0,t)=a_1(l,t)=0, t\in(0,T)$ нетрудно получить справедливость следующих равенств:

$$\int_0^l|\phi_{km}(x,t)|^2dxd\tau=\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\phi_{km}|^2dxd\tau-2\int_{\Omega_t}v_1(\tau)|\phi_{km}|^2dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\left(G^{(k)}(x,t)-G^{(m)}(x,t)\right)\bar{\phi}_{km}(x,\tau)\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T], k,m=1,2,\dots \ . \qquad (4.54)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и используя условия $v\in V$ и (2.6) для функции $a_1(x,t)$ получим справедливость следующих неравенств:

$$\left\|\phi_{km}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le (2b_1+\mu_5+1)\int_0^t \left\|\phi_{km}(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+\left\|G^{(k)}-G^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)}, k,m=1,2,\dots, \forall t\in[0,T] \ .$$

Применяя в этом неравенстве лемму Гроноулла имеем:

$$\left\|\phi_{km}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{14}\left\|G^{(k)}-G^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)}, k,m=1,2,\dots, \forall t\in[0,T], \qquad (4.55)$$

где $c_{14}>0$ постоянная не зависит от k,m. Оттуда нетрудно получить следующие неравенства:

$$\left\|\phi_{km}\right\|^2_{C^0([0,T],L_2(0,l))} \le c_{14}\left\|G^{(k)}-G^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)}, k,m=1,2,\dots. \qquad (4.56)$$

Здесь учитывая формулы $\phi_{km}(x,t)=\phi^{(k)}(x,t)-\phi^{(m)}(x,t), k,m=1,2,\dots$ имеем:

$$\left\|\phi^{(k)}-\phi^{(m)}\right\|^2_{C^0([0,T],L_2(0,l))} \le c_{14}\left\|G^{(k)}-G^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)}, k,m=1,2,\dots \qquad (4.57)$$

В силу условий сходимости (4.43) при $k,m\to\infty$ получим справедливость предельного соотношения:

$$\left\|G^{(k)}-G^{(m)}\right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \, . \qquad (4.58)$$

Из этого предельного соотнощения и неравенств (4.57) имеем:

$$\left\|\phi^{(k)}-\phi^{(m)}\right\|^2_{C^0([0,T],L_2(0,l))} \to 0 \ \text{при} \ k,m\to\infty \ . \qquad (4.59)$$

Из этого следует, что последовательность $\{\phi^{(k)}(x,t)\}$ сходится в норме постранства $C^0([0,T],L_2(0,l))$. А пространство $C^0([0,T],L_2(0,l))$ является полным пространством. Тогда ясно, что предельная функция $\phi(x,t)$ последовательности $\{\phi^{(k)}(x,t)\}$ удовлетворяет условию $\phi\in C^0([0,T],L_2(0,l))$. Теперь покажем, что предельная функция $\phi(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4.35). С этой целью в интегральном тождестве (4.47) вместо пробной функции возьмем любую пробную функцию $\eta_1\in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям $\eta_1(x,T)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\frac{\partial\eta_1(0,t)}{\partial x}=$ $=\frac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial x}=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ и применяем формулу интегрирования по частям. Тогда для любой функции $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,T)=0, \forall x \in \overset{0}{(0,l)}$, $\frac{\partial \eta_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1(l,t)}{\partial x} = 0, \forall t \in \overset{0}{(0,T)}$ получим справедливость следующих интегральных тождеств:

$$\int_{\Omega_t} \left[\phi^{(k)} \left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} + a_1(x,\tau)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(\tau)\bar{\eta}_1 + iv_1(\tau)\bar{\eta}_1 \right) \right] dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} G^{(k)}(x,t)\bar{\eta}(x,\tau)dxd\tau - i\int_0^l \phi^{(k)}(x,t)\bar{\eta}_1(x,t)dx, k=1,2,..., \forall t \in [0,T]. \qquad (4.60)$$

С учетем свойство сходимости последовательностей $\{\phi^{(k)}(x,t)\}, \{G^{(k)}(x,t)\}$ к функциям $\phi(x,t), G(x,t)$ соответственно при $k \to \infty$, если переходим к пределу в интегральном тождестве (4.60), то для $\phi \in C^0([0,T], L_2(0,l))$ и для любой функции $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,T)=0, \forall x \in \overset{0}{(0,l)}$, $\frac{\partial \eta_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1(l,t)}{\partial x} = 0, \forall t \in \overset{0}{(0,T)}$ получим справедливость следующего интегральнного тождества:

$$\int_{\Omega_t} \left[\phi \left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} + a_1(x,\tau)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(\tau)\bar{\eta}_1 + iv_1(\tau)\bar{\eta}_1 \right) \right] dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} G(x,t)\bar{\eta}(x,\tau)dxd\tau - i\int_0^l \phi(x,t)\bar{\eta}_1(x,t)dx, k=1,2,..., \forall t \in [0,T]. \qquad (4.61)$$

Из этого интегрального тождества при $t=T, \Omega_T=\Omega$ и $\eta_1(x,T)=0, \forall x \in \overset{0}{(0,l)}$ получим справедливость интегрального тождества (4.35). Это означает, что предельная функция $\phi \in C^0([0,T], L_2(0,l))$ является слабым обобщенным решением начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) из пространства $C^0([0,T], L_2(0,l))$.

Теперь установим оценку вида (4.41) для решения начально-краевой задачи (4.32)-(4.34). С этой целью в интегральных тождествах (4.47) вместо пробной функции $\eta \in L_2(\Omega)$ возьмем функции $\phi^{(k)} \in W_2^{2,1}(\Omega), k=1,2,...$. Тогда в полученных равенствах используя формулу интегрирования по частям получим справедливость следующих равенств:

$$\int_{\Omega_t} \left[i\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial t}\bar{\phi}^{(k)} - a_0 \left| \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x} \right|^2 + ia_1(x,\tau)\phi^{(k)}\frac{\partial \bar{\phi}^{(k)}}{\partial x} - a(x)\left|\phi^{(k)}\right|^2 + v_0(\tau)\left|\phi^{(k)}\right|^2 + iv_1(\tau)\left|\phi^{(k)}\right|^2 \right] dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} G^{(k)}(x,t)\bar{\phi}^{(k)}(x,\tau)dxd\tau, \forall t \in [0,T], k=1,2,.... \qquad (4.62)$$

Вычитывая из этих равенств их комплексные сопряжения получим следующие равенства:

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial t}\bar{\phi}^{(k)}+\frac{\partial\bar{\phi}^{(k)}}{\partial t}\phi^{(k)}\right)dxd\tau+i\int_{\Omega_t}a_1(x,\tau)\left(\phi^{(k)}\frac{\partial\bar{\phi}^{(k)}}{\partial x}+\bar{\phi}^{(k)}\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial x}\right)dxd\tau+$$

$$+2i\int_{\Omega_t}v_1(\tau)\left|\phi^{(k)}\right|^2dxd\tau=2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(G^{(k)}(x,t)\bar{\phi}^{(k)}(x,\tau)\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T],k=1,2,\dots\ .$$

Умножая на $(-i)$ эти равенства и преобразуя второе слагаемое левой части полученных равенств, имеем:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi^{(k)}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|\phi^{(k)}\right|^2\right)dxd\tau-\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|\phi^{(k)}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}v_1(\tau)\left|\phi^{(k)}\right|^2dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(G^{(k)}(x,t)\bar{\phi}^{(k)}(x,\tau)\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T],k=1,2,\dots\ .$$

Ясно, что в силу краевых условий $a_1(0,t)=a_1(l,t)=0,t\in(0,T)$ второе слагаемое левой части этих равенств равняется нулю. Поэтому с помощью неравенства Коши-Буняковского и начальных условий (4.48), а также условий $v\in V$, (2.6) из последних равенств можно установить справедливость неравенств:

$$\int_0^l\left|\phi^{(k)}(x,t)\right|^2dxd\tau\le(2b_1+\mu_5+1)\int_{\Omega_t}\left|\phi^{(k)}\right|^2dxd\tau+\left\|G^{(k)}\right\|^2_{L_2(\Omega)},k=1,2,\dots,\forall t\in[0,T].$$

Отсюда с помощью леммы Гроноулла получим справедливость следующих неравенств:

$$\left\|\phi^{(k)}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{15}\left\|G^{(k)}\right\|^2_{L_2(\Omega)},k=1,2,\dots,\forall t\in[0,T]. \qquad (4.63)$$

Здесь $c_{15}>0$ постоянная не зависит от k. С учетем свойство сходимости последовательностей $\{\phi^{(k)}(x,t)\},\{G^{(k)}(x,t)\}$ к функциям $\phi(x,t),G(x,t)$ соответственно при $k\to\infty$ если переходим к пределу в обеих частях неравенств (4.63), то получим справедливость следующей оценки:

$$\left\|\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{15}\left\|G\right\|^2_{L_2(\Omega)},\forall t\in[0,T]. \qquad (4.64)$$

Здесь выбирая $c_{13}=c_{15}$ получим справедливость оценки (4.41) настоящей теоремы. Непосредственно из оценки (4.41) следует единственность слабого обобщенного решения начально-краевой задачи (4.32)-(4.34) из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$. Теорема 4.2 доказана.

Теперь вернемся к задаче (4.11)-(4.13). Выше было сказано, что исследование существования и единственности решения из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ краевой задачи (4.11)-(4.13) эквивалентно исследованию существования и единственности решения из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ начально-краевой задачи (4.29)-(4.31). Поэтому для простоты изложения в задаче (4.29)-(4.31) выбирая переменную t вместо переменной τ и функции $\psi(x,t),G(x,t),a_1(x,t),v_0(t),v_1(t)$ вместо функций $\tilde{\psi}(x,\tau),G(x,\tau)$, $\tilde{a}_1(x,\tau),\tilde{v}_0(\tau),\tilde{v}_1(\tau)$ получили начально-краевую задачу (4.32)-(4.34) и доказали теорему 4.2 для разрешимости этой задачи в прстранстве $C^0([0,T],L_2(0,l))$. С учетом этого можем утверждать, что начально-краевая задача (4.29)-(4.31) также имеет единственное слабо обобщенное решение из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\|G\|^2_{L_2(\Omega)}, \forall\tau\in[0,T]. \quad (4.65)$$

С другой стороны, через $\phi(x,\tau)$ обозначили комплексное сопряжение функции $\tilde{w}(x,\tau)=w(x,T-\tau)=w(x,t)$, которая является решением задачи (4.26)-(4.28). Поэтому можем утверждать, что начально-краевая задача (4.26)-(4.28) также имеет единственное слабо обобщенное решение из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\tilde{w}(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\|\tilde{F}\|^2_{L_2(\Omega)}, \forall\tau\in[0,T]. \quad (4.66)$$

Тогда с учетом формул $\tilde{w}(x,\tau)=w(x,T-\tau)=w(x,t)$, $\tilde{\psi}(x,\tau)=\psi(x,T-\tau)=\psi(x,t)$, $\tilde{F}(x,\tau)=F(x,T-\tau)=F(x,t)$ вернувшись к краевой задаче, с помощью результатов о разрешимости начально-краевой задачи (4.26)-(4.28) можем утверждать, что краевая задача (4.11)-(4.13) также имеет единственное слабо обобщенное решение из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\|F\|^2_{L_2(\Omega)}, \forall t\in[0,T]. \quad (4.67)$$

Теперь используя краевую задачу (4.11)-(4.13) изучим сопряженную задачу (4.1)-(4.3).

Теорема 4.3. Пусть функции $a(x),a_1(x,t),\varphi(x),f(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.8) и $v\in V$. Пусть, кроме того, выполнены условия (4.4), (4.5). Тогда сопряженная задача (4.1)-(4.3) имеет единственное решение из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \le c_{16}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|y_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|y_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right), \forall t\in[0,T], \quad (4.68)$$

где $c_{16}>0$ постоянная не зависит от t.

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения сопряженной задачи (4.1)-(4.3) из краевой задачи (4.7)-(4.9) вычтем краевую задачу

(4.15)-(4.17). Тогда для функции $w = w(x,t) = \Phi(x,t) - z(x,t)$ получим краевую задачу (4.11)-(4.13), в которой краевые условия являются однородными. Как выше было доказано, что краевая задача (4.11)-(4.13) имеет единственное решение из пространства $C^0([0,T], L_2(0,l))$ в смысле определения 4.2 и для этого решения справедлива оценка (4.67). Тогда из формулы $w = w(x,t) = \Phi(x,t) - z(x,t)$ имеем формулу $\Phi(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$. С другой стороны, из выше сделанных рассуждений относительно разрешимости краевой задачи (4.15)-(4.17) при принятых предложениях можем утверждать, что краевая задача (4.15)-(4.17) имеет единственное почти всюду решение $z(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка (4.23). С учетом формулы $\Phi(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ можем утверждать, что сопряженная задача (4.1)-(4.3) также имеет единственное решение из пространства в смысле определения 4.1. Действительно, используя определение 4.2 для любой функции $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям

$$\eta_1(x,0) = 0, \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \ \frac{\partial \eta_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} t \in (0,T)$$

можем написать следующее интегральное тождество:

$$\int_\Omega \left[w(x,t)\left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(t)\bar{\eta}_1 - iv_1(t)\bar{\eta}_1 \right)\right] dxdt =$$

$$= \int_\Omega F(x,t)\bar{\eta}_1(x,t)\, dxdt \,.$$

В этом интегральном тождества учтем формулы (4.14). Тогда имеем:

$$\int_\Omega \left[\Phi(x,t)\left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(t)\bar{\eta}_1 - iv_1(t)\bar{\eta}_1 \right)\right] dxdt -$$

$$-\int_\Omega \left[z(x,t)\left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(t)\bar{\eta}_1 - iv_1(t)\bar{\eta}_1 \right)\right] dxdt =$$

$$= \int_\Omega \left((1-i)\frac{\partial z}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)z\right) - v_0(t)z + iv_1(t)z \right)\bar{\eta}_1 dxdt \,. \tag{4.69}$$

Рассмотрим следующий интеграл, который находится в левой части этого равенства:

$$\int_\Omega \left[z(x,t)\left(-i\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 \right)\right] dxdt \,. \tag{4.70}$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем этот интеграл. С учетом того, что функция $z(x,t)$ принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ и удовлетворяет условиям $z(x,T)=0,\overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\dfrac{\partial z(0,t)}{\partial x}=-\dfrac{2\beta_0}{a_0}(\psi(0,t)-y_0(t))$, $\dfrac{\partial z(l,t)}{\partial x}=\dfrac{2\beta_1}{a_0}(\psi(l,t)-y_1(t)),\overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ и функция $a_1(x,t)$ удовлетворяет условиям $a_1(0,t)=a_1(l,t)=0,\overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ для функции $\eta_1(x,t)$ из пространства, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0)=0,\overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\dfrac{\partial\eta_1(0,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial x}=0,\overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ нетрудно установить справедливость равенства:

$$\int_\Omega\left[z(x,t)\left(-i\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\bar\eta_1}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial x}-a(x)\bar\eta_1\right)\right]dxdt=$$
$$=\int_\Omega\left[\left(i\frac{\partial z}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x,t)z)-a(x)z\right)\bar\eta_1\right]dxdt-$$
$$-i\int_0^l z(x,T)\bar\eta_1(x,T)dx+i\int_0^l z(x,0)\bar\eta_1(x,0)dx+\int_0^T a_0 z(l,t)\frac{\partial\bar\eta_1(l,t)}{\partial x}dt-$$
$$-\int_0^T a_0 z(0,t)\frac{\partial\bar\eta_1(0,t)}{\partial x}dt-\int_0^T a_0\frac{\partial z(l,t)}{\partial x}\bar\eta_1(l,t)dt+\int_0^T a_0\frac{\partial z(0,t)}{\partial x}\bar\eta_1(0,t)dt-$$
$$-i\int_0^T a_1(l,t)z(l,t)\bar\eta_1(l,t)dt+i\int_0^T a_1(0,t)z(0,t)\bar\eta_1(0,t)dt=$$
$$=\int_\Omega\left[\left(i\frac{\partial z}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)z)-a(x)z\right)\bar\eta_1\right]dxdt-$$
$$-2\beta_1\int_0^T(\psi(l,t)-y_1(t))\bar\eta_1(l,t)dt-2\beta_0\int_0^T((\psi(0,t)-y_0(t))\bar\eta_1(0,t)dt. \qquad (4.71)$$

Если учесть это равенство в левой части равенства (4.69), то оттуда получим справедливость тождества:

$$\int_\Omega\left[\Phi(x,t)\left(-i\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\bar\eta_1}{\partial x^2}-ia_1(x,t)\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial x}-a(x)\bar\eta_1+v_0(t)\bar\eta_1-iv_1(t)\bar\eta_1\right)\right]dxdt-$$
$$-\int_\Omega\left[\left(i\frac{\partial z}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x,t)z)-a(x)z+v_0(t)z-iv_1(t)z\right)\bar\eta_1\right]dxdt=$$
$$=-2\beta_1\int_0^T(\psi(l,t)-y_1(t))\bar\eta_1(l,t)dt-2\beta_0\int_0^T((\psi(0,t)-y_0(t))\bar\eta_1(0,t)dt+$$
$$+\int_\Omega\left((1-i)\frac{\partial z}{\partial t}-i\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x,t)z)-v_0(t)z+iv_1(t)z\right)\bar\eta_1 dxdt.$$

С учетом того, что функция $z(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (4.15) для почти всех $(x,t)\in\Omega$ из этого интегрального тождества после сокращений подобных слагаемых получим справедливость того, что функция $\Phi(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4.6). Таким образом было доказано, что функция $\Phi(x,t)$ является единственным решением сопряженной задачи (4.1)-(4.3) из пространства $C^0([0,T],L_2(0,l))$ в смысле определения 4.1. С другой стороны для доказательства оценки (4.68) если использовать оценку (4.67), то оттуда имеем:

$$\|w(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le c_{17}\|F\|_{L_2(\Omega)},\forall t\in[0,T].$$

Здесь $c_{17}=\sqrt{c_{15}}$. В этом неравенстве учитывая формулу $w(x,t)=\Phi(x,t)-z(x,t)$ получим справедливость нераевенства:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le\|z(.,t)\|_{L_2(0,l)}+c_{17}\|F\|_{L_2(\Omega)},\forall t\in[0,T].$$

Из этого неравенства в силу формулы (4.14) для функции $F(x,t)$ и неравенства

$$\|z(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le c_{18}\|z\|_{W_2^{0,1}(\Omega)},\forall t\in[0,T],$$

а также условий на коэффициенты уравнения можем установить справедливость неравенства:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le c_{19}\|z\|_{W_2^{2,1}(\Omega)},\forall t\in[0,T].$$

отсюда в силу оценки (4.23) получим справедливость оценки:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le c_{20}\left(\|g_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|g_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right),\forall t\in[0,T]. \quad (4.72)$$

Здесь учитывая формулы $g_0(t)=-\dfrac{2\beta_0}{a_0}(\psi(0,t)-y_0(t))$, $g_1(t)=-\dfrac{2\beta_1}{a_0}(\psi(l,t)-y_1(t))$ имеем:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\le c_{21}\left(\|\psi(0,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|\psi(l,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|y_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|y_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \quad (4.73)$$

Ясно, что функция $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ при каждом $v\in V$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) и для этого решения справедлива оценка (2.10). С другой стороны для функции $\psi(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в силу теоремы о следах, известной из работы [12,29], можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi(0,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|\psi(l,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\le c_{22}\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}. \quad (4.74)$$

Если учесть оценку (2.10) в этом неравенстве получим справедливость следующей оценки:

$$\|\psi(0,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}+\|\psi(l,.)\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\le c_{23}\left(\|\varphi\|_{W_2^{2}(0,l)}+\|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right). \quad (4.75)$$

С помощью этой оценки из (4.73) получим следующую оценку:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \le c_{24}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|y_0\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)} + \|y_1\|_{W_2^{\frac{1}{4}}(0,T)}\right), \forall t \in [0,T]. \quad (4.76)$$

Отсюда при $c_{24} = c_{16}$ получим справеждивость оценки (4.68). Теорема 4.3 доказана.

Теперь используя этот результат о решении сопряженной задачи сперва докажем дифференцируемость функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V.

Теорема 4.4. Предположим, что выполнены условия теоремы 4.3 и $\omega \in H$ заданный элемент. Тогда функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V и для любого $v \in V$ справедлива следующие формулы для градиента функционала:

$$J'_\alpha(v) = (J'_{\alpha 0}(v), J'_{\alpha 1}(v)), \quad (4.77)$$

$$J'_{\alpha 0}(v) = \int_0^l \operatorname{Re}(\psi(x.t)\bar{\Phi}(x,t))dx + 2\alpha(v_0(t) - \omega_0(t)), \quad (4.78)$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = -\int_0^l \operatorname{Im}(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t))dx + 2\alpha(v_1(t) - \omega_1(t)), \quad (4.79)$$

где функции $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v), \Phi(x,t) \equiv \Phi(x,t;v)$ являются решениями редуцированной (2.2)-(2.4) и сопряженной задачи (4.1)-(4.3) при $v \in V$.

Доказательство. Пусть $\delta v \in B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$- приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$. Тогда ясно, что $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$ будет решением начально-краевой задачи (3.2), (3.3). где $\psi(x,t;v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v \in V$.

Рассмотрим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$. С помощью формул (2.1) имеем:

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) = 2\beta_0 \int_0^T \operatorname{Re}\left[(\psi(0,t) - y_0(t))\delta\bar{\psi}(0,t)\right]dt +$$

$$+2\beta_1 \int_0^T \operatorname{Re}\left[(\psi(l,t) - y_1(t))\delta\bar{\psi}(l,t)\right]dt +$$

$$+2\alpha \int_0^T (v_0(t) - \omega_0(t))\delta v_0(t)dt + 2\alpha \int_0^T (v_1(t) - \omega_1(t))\delta v_1(t)dt +$$

$$+\beta_0 \|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)} + \beta_1 \|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\|\delta v\|^2_H. \quad (4.80)$$

Теперь преобразуем первые двух слагаемых правой части этой формулы. Решение начально-краевой задачи (3.2), (3.3) удовлетворяет условию $\delta\psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$. Ясно, что эта функция для $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + \left(v_0(t)+\delta v_0(t)\right)\delta\psi + \right.$$

$$\left. + i\left(v_1(t)+\delta v_1(t)\right)\delta\psi \right]\bar{\eta}(x,t)\,dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \delta v_0(t)\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt - \int_\Omega i\delta v_1(t)\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt .$$

В этом интегральном тождестве вместо пробной функции $\eta \in L_2(\Omega)$ возьмем решение $\Phi \in C^0([0,T], L_2(0,l))$ сопряженной задачи (4.1)-(4.3). Тогда получим справедливость равенства:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + \left(v_0(t)+\delta v_0(t)\right)\delta\psi + \right.$$

$$\left. + i\left(v_1(t)+\delta v_1(t)\right)\delta\psi \right]\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \delta v_0(t)\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt - \int_\Omega i\delta v_1(t)\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt . \qquad (4.81)$$

Теперь в интегральном тождестве (4.6) для решения $\Phi \in C^0([0,T], L_2(0,l))$ сопряженной задачи (4.1)-(4.3) вместо пробной функции $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\dfrac{\partial \eta_1(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta_1(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ возьмем функцию функции $\delta\psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\delta\psi(x,0)=0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$, $\dfrac{\partial \delta\psi(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta\psi(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$. Тогда имеем:

$$\int_\Omega \left[\left(-i\frac{\partial \delta\bar{\psi}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\bar{\psi}}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\bar{\psi}}{\partial x} - a(x)\delta\bar{\psi} + v_0(t)\delta\bar{\psi} - iv_1(t)\delta\bar{\psi} \right)\Phi \right] dxdt =$$

$$= -2\beta_0 \int_0^T \left(\psi(0,t)-y_0(t)\right)\delta\bar{\psi}(0,t)\,dt \; - 2\beta_1 \int_0^T \left(\psi(l,t)-y_1(t)\right)\delta\bar{\psi}(l,t)\,dt \; .$$

Напишем комплексное сопряжение этого равенства. Тогда получим следующее равенство:

$$\int_\Omega \left[\left(i\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + v_0(t)\delta\psi + iv_1(t)\delta\psi \right)\bar{\Phi} \right] dxdt =$$

$$= -2\beta_0 \int_0^T \left(\bar{\psi}(0,t)-\bar{y}_0(t)\right)\delta\psi(0,t)\,dt \; - 2\beta_1 \int_0^T \left(\bar{\psi}(l,t)-\bar{y}_1(t)\right)\delta\psi(l,t)\,dt . \qquad (4.82)$$

Вычитывая из (4.81) равенство (4.82) имеем:

$$2\beta_0 \int_0^T \left(\bar{\psi}(0,t)-\bar{y}_0(t)\right)\delta\psi(0,t)\,dt + 2\beta_1 \int_0^T \left(\bar{\psi}(l,t)-\bar{y}_1(t)\right)\delta\psi(l,t)\,dt =$$

$$=\int_{\Omega}\delta v_0(t)\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt+\int_{\Omega}i\delta v_1(t)\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\delta v_0(t)\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt+\int_{\Omega}i\delta v_1(t)\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)dxdt\,. \qquad (4.83)$$

Если напишем комплексное сопряжение этого равенства, то получим:

$$2\beta_0\int_0^T(\psi(0,t)-y_0(t))\delta\bar{\psi}(0,t)\,dt+2\beta_1\int_0^T(\psi(l,t)-y_1(t))\delta\bar{\psi}(l,t)dt=$$

$$=\int_{\Omega}\delta v_0(t)\bar{\psi}(x,t)\Phi(x,t)\,dxdt-\int_{\Omega}i\delta v_1(t)\bar{\psi}(x,t)\Phi(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\delta v_0(t)\delta\bar{\psi}(x,t)\Phi(x,t)\,dxdt-\int_{\Omega}i\delta v_1(t)\delta\bar{\psi}(x,t)\Phi(x,t)dxdt\,. \qquad (4.84)$$

Суммируя равенства (4.83) и (4.84) имеем:

$$2\beta_0\int_0^T\mathrm{Re}\big[(\psi(0,t)-y_0(t))\delta\bar{\psi}(0,t)\big]dt+2\beta_1\int_0^T\mathrm{Re}\big[(\psi(l,t)-y_1(t))\delta\bar{\psi}(l,t)\big]dt=$$

$$=\int_{\Omega}\mathrm{Re}\big(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_0(t)\,dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Im}\big(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_1(t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\mathrm{Re}\big(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_0(t)\,dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Im}\big(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_1(t)dxdt\,. \qquad (4.85)$$

С учетем этого равенства приращение функционала можно представить в виде:

$$\delta J_\alpha(v)=J_\alpha(v+\delta v)-J_\alpha(v)=$$

$$=\int_{\Omega}\mathrm{Re}\big(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_0(t)\,dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Im}\big(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_1(t)dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^T(v_0(t)-\omega_0(t))\delta v_0(t)\,dt+2\alpha\int_0^T(v_1(t)-\omega_1(t))\delta v_1(t)\,dt+R(\delta v),\forall v\in V\,, \qquad (4.86)$$

где $R(\delta v)$ определяется формулой:

$$R(\delta v)=\int_{\Omega}\mathrm{Re}\big(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_0(t)\,dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Im}\big(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\big)\delta v_1(t)dxdt+$$

$$+\beta_0\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\beta_1\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\|\delta v\|^2_H\,. \qquad (4.87)$$

Теперь оценим остаточное слагаемое $R(\delta v)$. Используя формулу (4.87) можем написать следующее неравенство:

$$|R(\delta v)|\le\int_{\Omega}|\delta\psi(x,t)||\Phi(x,t)||\delta v_0(t)|\,dxdt+\int_{\Omega}|\delta\psi(x,t)||\Phi(x,t)||\delta v_1(t)|dxdt+$$

$$+\beta_0\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\beta_1\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\|\delta v\|^2_H\,.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\left|R(\delta v)\right| \le \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\delta v_0\|_{L_\infty(0,T)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\delta v_1\|_{L_\infty(0,T)} +$$
$$+\beta_0 \|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,T)} + \beta_1 \|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\|\delta v\|^2_H . \tag{4.88}$$

Используя оценки (2.10), (3.14), (3.15), а также оценку (4.68) для решения сопряженной задачи, для остаточного слагаемого $R(\delta v)$ получим следующее неравенство:

$$\left|R(\delta v)\right| \le c_{25}\|\delta v\|^2_B . \tag{4.89}$$

Здесь $c_{25} > 0$ постоянная не зависит от δv. Это означает, что

$$R(\delta v) = o\left(\|\delta v\|_B\right). \tag{4.90}$$

Если учесть это в формуле приращения функционала, то имеем:

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) =$$
$$= \int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0(t) - \omega_0(t)\right) \right] \delta v_0(t)\,dt +$$
$$+\int_0^T \left[-\int_0^l \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_1(t) - \omega_1(t)\right) \right] \delta v_1(t)\,dt + o\left(\|\delta v\|_B\right), \forall v \in V . \tag{4.91}$$

Используя определение дифференцируемости по Фреше функционалов в функциональных пространствах и методику доказательства дифференцируемости функционалов в замкнутых множествах, из этой формулы утверждаем дифференцируемость функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V и справедливость следующей формулы для его градиента:

$$J'_\alpha(v) = \left(J'_{\alpha 0}(v), J'_{\alpha 1}(v)\right), \tag{4.92}$$

где

$$J'_{\alpha 0}(v) = \int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi(x.t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0(t) - \omega_0(t)\right), \tag{4.93}$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = -\int_0^l \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_1(t) - \omega_1(t)\right), \tag{4.94}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 4.4 доказана.

Теперь укажем необходимое условие для решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4).

Теорема 4.5. Пусть выполнены условия теоремы 4.4 и $v^* \in V$ является любым решением задачи оптмального управления (2.1)-(2.4). Тогда для любого $v \in V$ справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0^*(t) - \omega_0(t)\right) \right] \left(v_0(t) - v_0^*(t)\right)dt +$$

$$+\int_0^T\left[-\int_0^l \mathrm{Im}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx+2\alpha\left(v_1^*(t)-\omega_1(t)\right)\right]\left(v_1(t)-v_1^*(t)\right)dt\geq 0. \qquad (4.95)$$

Здесь функции $\psi^*(x,t)\equiv\psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t)\equiv\Phi(x,t;v^*)$ являются решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) и сопряженной задачи (4.1)-(4.3) при $v^*\in V$.

Доказательство. Пусть $v^*\in V$ любое решение задачи оптимального управления (2.1)-(2.4), а $v\in V$ любой элемент и $\theta\in[0,1]$ любое число. Нетрудно проверить, что $v^*+\theta(v-v^*)\in V$, ибо множество V является выпуклым. Тогда ясно, что для $v^*\in V$ и любого $v\in V$ имеет место:

$$v^*+\theta(v-v^*)\in V\ ,\ \forall\theta\in(0,1). \qquad (4.96)$$

Теперь рассмотрим следующую разность $J_\alpha\left(v^*+\theta(v-v^*)\right)-J_\alpha(v^*)$, которая удовлетворяет условию:

$$J_\alpha\left(v^*+\theta(v-v^*)\right)-J_\alpha(v^*)\geq 0,\forall v\in V. \qquad (4.97)$$

В силу теоремы 4.4 функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V . Тогда используя (4.97) можем написать следующее равенство:

$$0\leq J_\alpha\left(v^*+\theta(v-v^*)\right)-J_\alpha(v^*)=\left\langle J'_\alpha(v^*),\theta(v-v^*)\right\rangle_B+o(\theta),\forall v\in V. \qquad (4.98)$$

Здесь

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{o(\theta)}{\theta}=0. \qquad (4.99)$$

Из неравенства (4.98) имеем:

$$\theta\left\langle J'_\alpha(v^*),(v-v^*)\right\rangle_B+o(\theta)\geq 0,\forall v\in V.$$

Если обе части этого неравенства делить на $\theta>0$ и переходить к пределу, то при $\theta\to+0$ получим справедливость неравенства:

$$\left\langle J'_\alpha(v^*),(v-v^*)\right\rangle_B\geq 0,\forall v\in V. \qquad (4.100)$$

В этом неравенстве учитывая формулы для градиента $J'_\alpha(v)$ из теоремы 4.4 при $v=v^*$ и используя интегральное представление линейного функционала в пространстве $B=L_\infty(0,T)\times L_\infty(0,T)$ получим следующее неравенство:

$$\int_0^T\left[\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx+2\alpha\left(v_0^*(t)-\omega_0(t)\right)\right]\left(v_0(t)-v_0^*(t)\right)dt+$$

$$+\int_0^T\left[-\int_0^l \mathrm{Im}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx+2\alpha\left(v_1^*(t)-\omega_1(t)\right)\right]\left(v_1(t)-v_1^*(t)\right)dt\geq 0,\forall v\in V.$$

Здесь функции $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t) = \Phi(x,t;v^*)$ соответственно являются решением редуцированной и сопряженной задач при $v^* \in V$. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 4.5 доказана.

Литература

1. Бутковский А.Г. (1984). Самойленко Ю.И. *Управление квантовомеханическими процессами*. М : Наука, 256 с.
2. Воронцов М.А (1985). Шмальгаузен В.И. *Принципы адаптивной оптики*. М: Наука, 366 с.
3. Журавлев В.М. (2001). *Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией*. Ульяновск, УлГУ, 200 с.
4. Иосида К. (1967). *Функциональный анализ*. М.: Мир, 624 с.
5. Искендеров А.Д., Ягуб. Г., Салманов В., (2019). Акцой Н.Й. Задача оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского государственного университета, Серия физико-математических и техн. наук*, № 4 (101), с. 32-44.
6. Искендеров А., Ягуб Г., Салманов В. (2018). Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского государственного университета, Серия физико-математических и технических наук,* № 4 (93), с. 28-43.
7. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. (1988). *Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала*. Докл. АН СССР, т. 303, № 5, с. 1044-1048.
8. Искендеров А., Ягубов Г. (2007). Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера. *Вестник Лянкяранского государственного университета, Серия Естественных наук*, с. 3-56.
9. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. (1989). Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами. *Автоматика и телемехан*., № 12, с. 27-38.
10. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. (2012). *Идентификация квантовых потенциалов*. Баку, Чашыоглу, 548 с.
11. Ладыженская О.А. (1973). *Краевые задачи математической физики*. М: Наука, 408 с.

12. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. (1967). *Линейные иквазилинейные уравнения параболического типа*. М: Наука, 736 с.
13. Михайлов В.П. (1983). *Дифференциальные уравнения с частными производными*. М.: Наука, 424 с.
14. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Мусаева М., Зенгин М. (2017). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантового потенциала в нелинейном нестационарном уравнении Шредингера с комплексным кожффициентом в нелинейной части. *Вестник Лянкяранского государственного университета, Естественные науки*, серия 2, с. 7-30
15. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Сулейманов Н. (2022). Вторая начально-краевая задача для уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримыи ограниченным комплексным потенциалом, зависящим от времени. *Вестник Лянкяранского государственного университета, Серия Математических и Естественных наук*, 1, с. 13-30.
16. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. (1997). *Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера. Дифференц*. уравнения, т.33, № 12, с. 1691-1698.
17. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. (2017). Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера. *Научные труды Нахичеванского госудавственного университета, Серия физико-математических и технических наук*, № 4 (85), с. 7-21.
18. Akbaba G.D. (2011). *The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient*. Master's thesis, Kars, 71 pp. (in Turkish).
19. Aksoy N.Y., Celik E., and. Zengin M On optimal control of a charged particle in a varying electromagnetic field. *Waves in Random and Complex Media*, DOİ: 10.1080/17455030.2022.2142695, 16 p
20. Baudouin L., Kavian O., Puel J.P. (2005). *Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control*. J. DifferentialEquations, 216, p. 188-222.
21. Goebel M. (1979). *On existence of optimal control. Math*. Nachr., vol. 93, p. 67-73.
22. Ibragimov N.S. (2011). On one identification problem for a one-dimensional nonlinear stationary quasi-optic equation. *Tavricheskiy Vestnik Informatiki i Matematiki*, No.2, pp.17-29. (in Russian)
23. Ibragimov N.S. (2010). On the existence of a solution to the identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation. *Nauchnye Trudy, Azerb. Tech. Univ., Ser. Fundamental Sciences*, No.2, pp.75-83. (in Russian)
24. Ibragimov N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary

coefficient in the nonlinear part. *News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences*, No.3, pp.72-84. (in Russian).

25. Ibragimov N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. *International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics"*, Vol.1, No.29, pp.61-70. (in Russian).
26. Ibragimov N.S. (2012). The identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. *Problems of Control and Informatics*, No.4, pp.15-27. (in Russian)
27. Iskenderov A.D., Yagub G**.,** Y. Aksoy N. (2015). An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schrödinger requation with a spesial gradient terms. *Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties* (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, - pp.27-28.
28. İskenderov A.D., Yagub G., Zengin M. (2016). Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. *Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties* (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.79-80
29. Lions J.-L., Magenes E. (1972). *Non-homogeneous boundary value problems and applications* - vol. 2. Berlin, 307 p.
30. Paşayev A.M., İskenderov A.D., Yagubov G.Y. Musaeva M.A. (2020). *Variation method solving of the inverse problems for Schrödinger-type equation*. J. Inverse Ill Posed Probl., doi.org/10.1515/jiip-2020-0095, 12 pp.
31. Yagub G., İbrahimov N.S**.,** Aksoy N.Y. (2016). On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. *Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties* (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, pp.170-171.
32. Yagub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. (2015). Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms. *Abstracts of the XXV International Conference Problemsof Decision Making under Uncertainties* (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, pp.53-54.
33. Yagub G., İbrahimov N.S and Zengin M. (2018). The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term. *Journal of Mathematical Physics*, *Analysis, Geometry*, № 2, pp. 214-232.
34. Yagubov G**.,** Toyoğlu F., Subaşı M. (2012). *An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
35. Yakub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. (2021). Optimal control problem for the stationary quasi- optics equation with a special gradient term. *Advanced Mathematical Models and Applications,* Vol. 6, № 3, pp. 252-265.

36. Zengin M., İbrahimov N.S., Yagub G. (2021). Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term. *Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Naturl sciences series,* № 1, pp. 27-42.

XÜSUSİ QRADİYENT TOPLANANLI VƏ ZAMANDAN ASILI KOMPLEKS POTENSİALLI ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD FUNKSİONALLI OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

Qabil Yaqub
Natiq İbrahimov
Merve Zengin
Kafkas Universiteti, Qars, Türkiyə
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Bu məqalədə xüsusi qradiyent toplananlı və zamandan asılı kompleks potensiallı xətti bir ölçülü Şredinger tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Bu məsələdə keyfiyyət meyarı oblastın sərhədi üzrə olan inteqral funksionaldır və idarəetmə rolunu tənliyin ölçülən məhdud əmsalları, yəni yalnız zaman dəyişənindən asılı kompleks potensialın həqiqi və xəyali hissələri oynayır. Bu işdə əvvəlcə baxılan optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün varlıq və yeganəlik teoremləri isbat edilir. Daha sonra baxılan optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün zəruri şərt məsələsi öyrənilir. Bu məqsədlə əvvəlcə baxılan optimal idarəetmə məsələsinə qoşma məsələnin həlli qeyri bircins sərhəd şərtli sərhəd məsələsinin həlli kimi tədqiq olunur. Sonra qoşma məsələnin həllinin köməyi ilə baxılan funksionalın qradiyenti üçün düstur çıxarılır. Əldə edilən düstura əsasən variasia bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt isbat edilir.

Açar sözlər: Şredinger tənliyi, optimal idarəetmə məsələsi, qradiyent toplanan, kompleks potensial.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH BOUNDARY FUNCTIONAL FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM AND WITH A TIME-DEPENDENT COMPLEX POTENTIAL

Gabil Yagub
Natiq Ibrahimov
Merve Zengin
Kafkas university, Kars, Turkiye
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

In this paper, we consider the problem of optimal control for a linear one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and with a complex potential, when the performance criterion is an integral over the boundary of the domain and the role of control is played by bounded measurable coefficiens of the equation, that is, the real and imaginary parts of complex potential, depending only from a time variable. At the same time, existence and uniqueness theorems fort he solution of the optimal control

problem under consideration a proved. Further in this paper, we first study the solvability of the adjoint problem to the optimal control problem under consideration, that is, as a boundary value problem with inhomogeneous boundary conditions, with the help of which we prove the formula fort he gradient of the considered functional. Based on the obtained formula, a necessary condition is established in the form of a variational inequality.
Key words: Schrödinger equation, optimal control problem, gradient term, complex potential.

Daxil oldu: 02.06.2022; Çapa qəbul edildi: 14.11.2022; Çap edildi: 30.12.2022